Éducation et didactique

6-2 | octobre 2012
Varia

Des dispositifs Piagétiens... aux situations didactiques

From Piagetian experimental designs ... to didactical situations

Guy Brousseau

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475
DOI : 10.4000/educationdidactique.1475
ISSN : 2111-4838

Éditeur
Presses universitaires de Rennes

Édition imprimée
Date de publication : 30 octobre 2012
Pagination : 103-129
ISBN : 978-2-7535-1984-8
ISSN : 1956-3485

Référence électronique
Guy Brousseau, « Des dispositifs Piagétiens... aux situations didactiques », *Éducation et didactique* [En ligne], 6-2 | octobre 2012, mis en ligne le 30 octobre 2014, consulté le 10 décembre 2020. URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/1475 ; DOI : https://doi.org/10.4000/educationdidactique.1475

DES DISPOSITIFS PIAGÉTIENS… AUX SITUATIONS DIDACTIQUES

Guy Brousseau

Résumé : L'auteur présente un aperçu de l'historique de la théorie des situations en mettant en évidence l'enchaînement des idées et des circonstances qui l'ont suscitée. La première partie évoque rapidement l'origine mathématique (L. Félix, A. Lichnerowicz) de la théorie des situations mais insiste sur ses sources psychologiques (P. Gréco, J. Piaget, H. Wermuz) et sur le rôle d'alternatives didactiques (Z. Diénès). L'étude scientifique de l'enseignement ne peut commencer qu'au plus près de son objet : l'interaction de l'élève avec une connaissance mathématique mise en œuvre dans un milieu précis, une situation mathématique, et seulement par les voies, complémentaires, de l'observation et de la modélisation. Le propos est illustré par les commentaires d'une expérience bien connue sur les nombres naturels. La deuxième partie développe les principaux concepts de la théorie des situations mathématiques en évoquant son origine, sa nécessité, ses méthodes et les questions qu'elle soulève. Le traitement de la théorie des situations didactiques proprement dite se réduit à une présentation sommaire de la dévolution et de l'institutionnalisation. La troisième partie traite de la différence entre les notions de « situation-problème » et celle de situations. Quelles différences, quelles conséquences ? Elle se termine par un certain nombre de questions ouvertes aux didacticiens.

Mots clés : didactique des mathématiques, histoire de la théorie des situations didactiques, situation mathématique, situation-problème

Guy Brousseau

Introduction

Dans la première partie, j'évoquerai comment un instituteur qui aimait les mathématiques a rencontré l'épistémologie génétique et comment il a été amené à utiliser puis à transformer ses dispositifs d'observation, pour enfin, sous beaucoup d'autres influences, les absorber dans une « théorie des situations didactiques ». Celle-ci est aujourd'hui une des bases de la « science expérimentale du didactique », qui s'oppose en partie à l'approche de Comenius.

Cette première partie me permettra de rendre hommage à mes sources suisses. Car, après Pierre Gréco [1], Wermus [2] m'a fait accéder à l'intimité de son regard sur certains des travaux de Jean Piaget, et à ceux de Ferdinand Gonseth. Et ce regard à la fois sagace, compréhensif et lucide m'a donné des clés essentielles.

Dans une seconde partie, à défaut de pouvoir présenter en détail l'évolution d'une réflexion qui s'étend sur presque quarante-cinq ans et qui a bénéficié des efforts conjugués de plus d'une centaine de personnes, j'essaierai d'illustrer le passage du point de vue de l'épistémologie génétique à celui de la didactique sur un exemple célèbre : la connaissance du nombre naturel.

Dans une troisième partie, je voudrais pouvoir dire quelques mots de la théorie des situations ou du moins de son organisation actuelle, bien que je ne puisse pas évoquer ce qui est le plus important : l'enracinement expérimental et méthodologique de ces concepts.

En guise de conclusion, loin de me prévaloir de mes succès, je m'interrogerai sur l'influence des recherches aussi bien en psychologie qu'en didactique, pédagogie ou en sociologie sur l'enseignement.

Origines didactiques et psychologiques de la théorie des situations

La théorie des situations est née de la remise en question et de la critique d'un certain nombre de tendances et de tentatives d'influence sur l'enseignement des mathématiques.

Mouvement de réformes.

Dans les années 50-70, en particulier en France, le flux d'injonctions que l'enseignement reçoit habituellement de l'ensemble des institutions de la société s'intensifie brutalement. Avec les espérances d'une après-guerre et l'aisance financière des trente glorieuses, des propositions d'origines diverses, concernant entre autres, l'éducation (Langevin-Wallon), la psychologie (Piaget), « la » mathématique (Bourbaki), la linguistique (Chomsky), etc. se rassemblent sous une même bannière épistémologique : le structuralisme. Le bouillonnement se fait plus pressant et déborde en un train de réformes scolaires à tous les niveaux. La didactique classique issue des humanités, et ses avatars comme la méthodologie, sont submergés, discrédités, au moment même où s'effondrent les rapports de l'enseignement, notamment public, avec les institutions qui assuraient sa « protection » politique et scientifique.

Les critiques à l'encontre des actions des corps de l'état et du système éducatif sont radicales et très violentes, et elles s'accompagnent paradoxalement de l'affirmation que ces mêmes corps doivent et peuvent se réformer eux-mêmes et inventer des solutions nouvelles. Cette position contradictoire se maintient aujourd'hui, mais rien de concret ne vient remplacer ce qui est rejeté. D'autant plus que rien, au fond, ne relie de façon cohérente la masse des espoirs et des demandes qu'il a fallu mobiliser pour obtenir un mouvement appréciable.

Ainsi par exemple, l'enseignement traditionnel aurait sans doute pu *présenter* les nouvelles connaissances de mathématiques aux élèves, en séparant le « contenu » et les méthodes. Il aurait ajouté quelques chapitres en modifiant un peu la présentation « axiomatique » sans en changer l'esprit. Mais la proposition structuraliste, alliée objective du behaviorisme permettait soudain un autre procédé officiel de construction des connaissances par les structures et les analogies comme on le verra plus loin. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle s'est présentée aux professeurs.

En même temps que cette concession était accordée, la nécessité d'une adaptation aux étapes de l'apprentissage et du développement – d'une transposition – était déniée : de la maternelle à l'université, le savoir devait pouvoir être le même, s'exprimer dans les mêmes termes. La vérité (du point de vue structuraliste) paraissait même ne pas requérir la médiation d'une transmission à condition que la structure soit suffisamment épurée (préface de Bourbaki).

De toute part, les exigences se multipliaient et se présentaient comme des impératifs catégoriques.

Il n'était plus possible d'ignorer ostensiblement que la psychologie, la pédagogie moderne, la sociologie, la philosophie critiquaient les méthodes classiques, sans trop appuyer sur les divergences qu'elles auraient pu souligner avec les divers projets de réforme…

Mais le structuralisme triomphant recouvrait d'un voile rassurant les divergences et mêmes les contradictions de toutes ces ambitions.

Or il n'était pas possible de satisfaire, sur de nouveaux contenus, en même temps – et surtout dans le faible laps de temps imparti –, toutes les orientations prescrites. Elles prônaient en vrac l'activité et la généralisation, l'abstraction et la construction d'un sens [3], la rigueur et l'utilité, la manipulation de machines et la découverte, l'individualisation [4] et le développement des relations sociales, la communication et l'innovation, le respect des stades génétiques ou celui de la liberté des élèves (C. Freinet, 1946), (H. Marcuse, 1965, 1968), (Illich, 1971|…) etc.

Ce faisceau de projets était une utopie qui ignorait totalement toutes les difficultés et toutes les lois de la diffusion des connaissances et des pratiques dans une société, en particulier les questions de temps de réponse des systèmes. Il a crû et est mort dans l'illusion de la transparence des faits didactiques et de la toute puissance des moyens de connaissances.

Dans cet épisode, ni les « contenus » de l'enseignement – les mathématiques – ni leur conception, moderne ou pas - ne peuvent être mis en cause, et les excès spectaculaires en tous genres qui ont ensuite servi d'alibi à la contre-réforme ne sont eux-mêmes que des conséquences et des révélateurs d'un fait principal : notre ignorance de la fragilité et de la complexité des systèmes didactiques.

Un grand nombre d'appétits économiques, sociaux, culturels et politiques ont fait de l'enseignement (en particulier public) que l'on croyait indestructible, le champ clos de leurs affrontements. Il faudrait faire une place à part à tout un ensemble de courants anarchistes (sans rapports avec le structuralisme) qui trouvèrent un exutoire en mai 68 ; œuvrant d'abord en faveur des réformes mais en leur assignant leurs propres objectifs, ils se retournèrent contre elles lorsqu'il s'est agi de les mettre sérieusement en œuvre.

Rôle de l'ingénierie didactique des années soixante

Mais revenons à l'enseignement des mathématiques au début des années soixante. Instituteur initié aux mathématiques, j'ai d'abord conçu, pour l'école primaire, un enseignement où les structures et notions nouvelles étaient seulement mises *au service* du programme classique, en utilisant au mieux les procédés didactiques et les méthodes pédagogiques en usage à l'époque (G. Brousseau, 1965). Mes conceptions didactiques étaient à peu près celles que je découvris plus tard chez Diénès [5] (Z. Diénès, 1971). Mais alors que les choix didactiques étaient très proches, son discours et le mien étaient différents.

Par exemple j'avais conçu un matériel structuré *unique*, mais beaucoup plus complexe que celui de Diénès, composé de baguettes de longueurs et de sections différentes, colorées… dont il fallait extraire les éléments utiles à telle ou telle leçon. Au contraire, Diénès concevait ses leçons comme des *jeux* que le professeur pouvait considérer indépendants, avec un matériel déterminé, immuable et individuel. Dans ces jeux, la structure mathématique était dans la consigne. Il fallait donc la comprendre pour jouer. Ce qui ne correspondait pas à mes modèles de la théorie des jeux. Mais cette critique m'a amené à lui emprunter inconsciemment l'idée de passer de l'étude des leçons et des connaissances que l'élève en tire, à celle des situations liées à la connaissance en acquisition.

Au cours des années 65-70 les professeurs de mathématiques cherchaient à inventer des exercices pour accompagner l'introduction magistrale des connaissances mathématiques nouvelles. Leurs efforts trahissaient à mes yeux une certaine pauvreté de nos conceptions didactiques. Ils se contentaient le plus souvent de trouver un exemple où le professeur pouvait reconnaître et faire voir – au sens de « lire » - les éléments de la structure ou les propriétés énoncées dans la définition ou le théorème de mathématiques étudié. La situation était donc une traduction littérale de la structure à enseigner, munie d'un habillage quelconque. Elle ne jouait aucun rôle. Elle était là, et l'élève devait la « découvrir ».

Cette présentation ne donnait aucune fonction à la connaissance de l'élève qui se contentait de reconnaître, sans raison, les connaissances cachées par le professeur, comme des œufs de Pâques dans un jardin. De plus, en préparant un programme pour une année entière, et non pas en adaptant quelques leçons, j'avais rencontré des difficultés qui avaient éveillé ma suspicion. Il fallait donc organiser la dépendance entre les apprentissages et la prendre en charge. On ne pouvait pas se contenter de considérer que la seule obligation de mémoire (J. Centeno, 1995) dans la classe incombait aux élèves.

Il me fut facile de cultiver mes doutes et mon autocritique, d'autant plus que leur objet était désormais assumé par un autre. Les théories de Diénès furent de ce fait, pour moi, pendant des années, une source inépuisable de critiques et de sujets d'études. La plupart des concepts nouveaux de la TSM [6] sont nés de cette partie de punching-ball contre la « psycho-mathématique ».

Rôle de la psychologie et l'épistémologie génétique

En 1964, Lichnerowicz [7] m'a proposé un programme d'études – en mathématiques et dans d'autres matières –, et comme sujet de recherches : « conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques ». Il m'envoya vers Pierre Gréco qui me fit étudier l'épistémologie génétique, et à Bordeaux, je me mis à l'école de Jacques Wittwer [8].

En psychologie, les dispositifs ont pour objet de révéler les connaissances des sujets. À l'époque j'admettais que les dispositifs d'enseignement devaient être déterminés par les « lois » de la psychologie. Mais si ces dispositifs devaient être inventés par les observateurs, ils n'étaient pas considérés comme des objets d'études.

Par exemple dans l'expérience célèbre par laquelle un enfant révèle ou même apprend (selon Piaget) la conservation du nombre, l'expérimentateur fait varier l'espace occupé par la collection et l'enfant doit dire s'il y a ou non la même chose. Il suffit que l'observateur voie qu'il y a conservation du nombre pour qu'il considère que l'enfant doit le voir lui aussi, « s'il est conservateur »

Piaget n'indique pas la raison pour laquelle c'est ce qui est conservé – le nombre –, et non ce qui est modifié – l'espace occupé –, qui doit inspirer la réponse de l'enfant.

Cependant les premiers exemples de situations dans lesquelles le sujet met en œuvre des « connaissances » pour répondre et s'adapter à une sollicitation du milieu me sont venus sans conteste des dispositifs expérimentaux d'épistémologie génétique. Par exemple, pour tester la conservation de l'ordre, Gréco faisait entrer l'une après l'autre dans un étroit tuyau, trois perles différentes. Après des rotations de 180°, l'enfant devait annoncer celle qui sortirait la première et révéler ainsi l'état de son développement à propos de la conservation de l'ordre dans les inversions. Mais la fréquentation de ce dispositif pouvait-elle provoquer un développement d'une connaissance fonctionnelle ?

Destinés à mettre en évidence l'originalité de la pensée mathématique de l'enfant, et les étapes de son développement, ces dispositifs étaient nécessairement spécifiques des connaissances, c'est-à-dire qu'à chaque connaissance identifiée on peut déterminer au moins un dispositif d'usage et d'apprentissage qui lui est propre [9].

Mais les auteurs de l'époque ne faisaient aucun effort pour analyser *a priori* la façon dont ces dispositifs agissaient et pour expliciter ce rapport entre le dispositif, la notion mathématique dont l'acquisition était étudiée [10] (Pierre Gréco, 1991) et les comportements des élèves. Or il y avait beaucoup de questions à poser.

Par exemple, lorsque Piaget utilisait les axiomes de Peano pour identifier LE développement de LA connaissance DU nombre chez L'enfant, ces singuliers m'apparaissaient plutôt comme des paris intéressants mais risqués, que comme des évidences. Je pouvais produire des « définitions » des nombres naturels, mathématiquement équivalentes aux axiomes de Peano, mais de complexité cognitive très diverse. L'équivalence mathématique n'entraîne pas l'équivalence cognitive. Les axiomes sont « logiquement » équivalents à la théorie qu'ils engendrent, mais une bonne partie du travail mathématique consiste justement à établir des éléments de cette équivalence.

De même, il suffisait de faire varier un tant soit peu les nombres proposés pour voir que la connaissance DU nombre était en fait celle de quelques nombres. Qu'est-ce qui permet de déclarer que c'est exactement cette connaissance mathématique qui est la connaissance du sujet et non une autre plus générale ou plus particulière ?

Ces observations n'étaient pas pour moi des objections aux travaux de Piaget, mais des réserves à l'endroit de l'usage didactique que l'on voulait en faire. Plus précisément l'idée d'utiliser ces épreuves pour parler des acquisitions d'un élève particulier dans une situation particulière et pour en inférer des prescriptions didactiques (Aebli, 1951) [11] soulevait des objections insurmontables :

a. L'acquisition « du nombre » (les axiomes de Peano) n'assure pas la maîtrise de l'utilisation des nombres dont on a besoin. La connaissance des axiomes ne donne pas la liste des théorèmes d'une théorie. Le nombre 25 a-t-il les mêmes propriétés que 26 ou que 25^{25} ou que $(25^{(25^{\cdots 25})})$? Il y a confusion entre la fonction « objet » et la fonction « propriété d'un objet » ou entre une théorie et une métathéorie. L'enseignement classique passe plus volontiers par une métathéorie de l'objet de l'apprentissage (la grammaire pour la langue, les énoncés de théorèmes pour leur démonstration et leur usage, le langage pour l'action) plutôt que par son usage et sa compréhension. L'acculturation spontanée par frayage procède-t-elle ainsi ? Est-elle inutile en mathématique ?

b. De plus si une liste d'axiomes engendre une théorie, une théorie peut être générée par de nombreux systèmes d'axiomes. Lequel choisir ? L'équivalence mathématique ou logique entre les théories n'entraîne évidemment pas l'identité ou même l'équivalence comme connaissance, comme moyen de générer des théorèmes. (Une bonne partie du travail mathématique consiste à chercher les organisations les plus commodes).

c. L'engendrement des connaissances par leur construction axiomatique lui-même n'est justifié que par le besoin de contrôler leur consistance et par des considérations d'ergonomie très théoriques et incomplètes. L'usage des mathématiques développe au contraire un enchevêtrement de relations dont l'inférence n'est qu'une partie. Comment faire pénétrer les élèves dans ce maquis ?

d. La découverte en mathématique est précédée et nourrie par des questions. Les psychologues et les enseignants se focalisent sur les réponses des élèves, mais beaucoup moins sur les questions. Pourquoi ? Pourrait-on enseigner aux élèves à poser des questions sans risquer de se noyer dans les fausses questions et les questions sans réponses ?

e. L'idée d'adaptation elle-même conduit à douter de l'hypothèse qui prévoirait une identité formelle entre UNE structure de savoirs mathématiques, UNE structure des situations, d'usage ou d'apprentissage, correspondantes, UNE structure des connaissances du sujet adaptées à ces situations, et UNE structure des connaissances enseignées par le professeur.

f. Et même si les réflexions structuralistes de l'époque montraient bien *comment* les structures surgissaient avec une merveilleuse ubiquité dans les conditions les plus inattendues, la question *pourquoi* ne recevait guère de réponses satisfaisantes.

g. Et de ce fait l'enseignement des mathématiques se trouvait lancé dans une quête effrénée de la génération des structures comme il l'avait été précédemment dans la quête aux théorèmes. La réponse usuelle consistait en des procédés empiristes sensualistes et/ou behavioristes, en totale contradiction avec d'autres résultats de l'épistémologie génétique. À partir d'exemples et d'analogies, l'enseignant recherchait d'hypothétiques généralisations qui auraient fourni des structures prêtes à schématiser et à formaliser (Diénès).

h. Ma conclusion a été que s'il existe des convergences nécessaires entre l'organisation mathématique et l'organisation de leur apprentissage, il devait exister aussi des divergences nécessaires. Pour les détecter et les comprendre il fallait partir chaque fois de la connaissance visée, étudier son « écosystème », ses genèses possibles et les conditions attachées à ses usages.

L'idée de « situations mathématiques »

Il m'est donc alors apparu qu'il fallait prolonger ces travaux en étudiant les dispositifs eux-mêmes et leurs rapports avec telle ou telle connaissance : dans quelles conditions un sujet - quelconque - peut-il être amené à avoir besoin de telle connaissance pour établir ses décisions, et pourquoi *a priori*, le ferait-il ? Sans les dispositifs piagétiens, cette idée aurait été bien banale car étudier les problèmes et les exercices qui font utiliser une notion mathématique est un travail coutumier aux mathématiciens depuis l'antiquité. En entreprenant ce travail, j'ai donc cru faire une œuvre utile du point de vue « théorique », mais aussi du point de vue pratique. Car il me semblait que les professeurs avaient tendance à vouloir utiliser les dispositifs d'épistémologie pour enseigner les « vraies » mathématiques à leurs élèves.

Mais comme chaque notion appelle tout un ensemble de problèmes et d'exercices qui lui sont spécifiques, on pouvait penser que cette voie de recherche avait une chance à peu près nulle d'apporter des informations sur l'acquisition de savoirs un peu généraux. Dans cette perspective les comportements des élèves sont les révélateurs du fonctionnement du milieu considéré comme un système : la boite noire des behavioristes devenait pour moi alors le milieu et les réactions des élèves les révélateurs des propriétés de ce milieu.

Le maître mot de ces travaux est : « pourquoi ». Cette méthode conduit naturellement à considérer un problème ou un exercice, non pas comme une simple re-formulation d'un savoir, mais comme un dispositif, comme un milieu qui « répond » au sujet suivant certaines règles. À quel jeu le sujet doit-il jouer pour avoir besoin de telle connaissance ? Quelle aventure - succession de jeux - peut l'amener à la concevoir, ou à l'adopter ? Dans cette approche, le sujet n'a pas besoin d'être mieux décrit que le joueur d'échec, qui pousse les blancs ou les noirs suivant une stratégie impersonnelle. Quelle information, quelle sanction pertinente doit recevoir le sujet de la part du milieu pour orienter ses choix et investir telle connaissance plutôt que telle autre ?

La même démarche conduit alors à considérer le milieu comme un système autonome, antagoniste du sujet, et c'est lui qu'il convient de modéliser comme une sorte d'automate.

Nous avons appelé « situation » (sous entendu mathématique)un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain milieu qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce milieu un état favorable. Certaines de ces « situations » nécessitent l'acquisition « antérieure » de toutes les connaissances et des schèmes nécessaires, mais d'autres offrent une possibilité au sujet de construire lui-même une connaissance nouvelle en un processus « génétique », c'est-à-dire qui l'engendre.

Notons que le même mot « situation » sert, dans son sens ordinaire, à décrire tantôt l'ensemble (non nécessairement déterminé) des conditions qui entourent une action, tantôt le modèle théorique et éventuellement formel qui sert à l'étudier.

Dispositifs piagétiens et situations

Lorsque Piaget s'intéresse au développement de la connaissance du nombre naturel, l'épistémologie des mathématiques de l'époque lui fournit le concept d'invariant, dont Félix Klein avait fait un usage remarquable. Les éléments caractéristiques d'un objet sont ceux qui restent invariants dans un ensemble structuré de transformations.

À la condition de concevoir des épreuves adéquates pour constater la présence ou l'absence de ces invariances, il devient possible, par des collections d'épreuves étudiées longitudinalement, de mettre en évidence des hiérarchies dans l'apparition de ces structures.

L'opportunité d'étudier le développement de connaissances non scolaires et non culturelles est offerte à Piaget par l'apparition d'une nouvelle approche des mathématiques. Issue d'une longue évolution de l'Analyse mathématique, une puissante réorganisation axiomatique des théories et des objets suivant leurs structures affecte toutes les branches des mathématiques. Piaget y a trouvé l'instrument métamathématique dont il a besoin pour séparer l'activité mathématique des sujets qu'il observe, et avec qui il utilise les concepts et le langage classique, de l'analyse qu'il en fera et qui s'exprimera en termes nouveaux. Il pourra ainsi chercher l'apparition des nouvelles structures dans des comportements des enfants induits par les conceptions classiques.

L'utilisation opportune de ces notions d'invariants et de structure lui permet ainsi d'examiner le développement de la connaissance du nombre sans avoir à se préoccuper d'en examiner aucun (par exemple savoir si l'enfant « connaît » le « nombre » 78 ou 137, indépendamment des pratiques scolaires etc.) Cet avantage disparaîtra lorsque l'enseignement s'augmentera de ces connaissances métamathématiques (pour les élèves). Si l'apprentissage scolaire précoce inclut un jour l'enseignement des « propriétés du nombre et des opérations » en plus de leur pratique et de leur usage, comme le mouvement des mathématiques moderne tendait à le préconiser, l'accès à la genèse spontanée « du nombre » par l'observation de l'usage des propriétés méta-numériques deviendrait impossible. Mais pour le moment il lui permet d'établir l'épistémologie génétique.

L'équivalence évoquée ci-dessus suffit à Piaget pour son projet : un enfant qui peut ordonner et réordonner une collection, qui peut reconnaître que son nombre ne varie pas lorsqu'on en modifie la disposition, qui différencie deux collections qui ne diffèrent que de un élément… est un enfant qui est en mesure d'apprendre la structure des nombres naturels.

Il devrait être clair pour les enseignants comme pour les mathématiciens que la connaissance de la structure ou des axiomes ne peut pas être tenue pour équivalente à celle de la théorie. Seules les assurances structuralistes ont pu le faire croire. L'importation des théories et des dispositifs de Piaget dans l'enseignement s'est faite sur une série de confusions hasardeuses comparables : la théorie avec son système de générateurs, mais aussi la connaissance avec le savoir, le sujet psychologique avec l'élève, le dispositif avec le milieu etc. L'utilisation des épreuves de Piaget dans l'enseignement des mathématiques, que ce soit pour provoquer les apprentissages ou que ce soit pour en « contrôler » les effets me semble avoir été une méprise grave qui a contribué à développer des attitudes et des pédagogies attentistes assez dommageables.

En épistémologie génétique, les épreuves n'ont pas pour objet les modalités concrètes des apprentissages, mais l'ordre de leurs résultats. Cet ordre est supposé être déterminé par des lois du développement mental indépendantes des individus et des cultures, qu'il s'agit d'élucider.

Les apprentissages scolaires et l'environnement culturel produisent donc des connaissances qui brouillent évidemment l'*étude* de ces lois. Piaget sera donc conduit à éviter l'étude des sujets scolaires.

Le sujet et le milieu, l'observateur

La modélisation que Wermus (Wermus, 1981) propose pour exprimer les idées de Piaget sur la genèse de la pensée logique de l'enfant a joué un rôle important dans le développement de la théorie des situations didactiques.

Le sujet reconnaît un objet par le moyen d'un « prédicat amalgamé » (PA). Il est constitué d'une liste de composantes contextuelles (C.C.). Chaque composante contextuelle exprime une condition qui doit être réalisée pour que le sujet identifie l'objet. Ce sont donc des restrictions opposées à la reconnaissance de cet objet.

Par exemple, l'observateur présente un rectangle à des sujets : « être rectangle » est une composante contextuelle de cet objet. La connaissance d'un sujet s qui utilise le prédicat « rectangle » exactement de la même façon que l'observateur lui-même est représentée par Rs. Mais si un sujet s_1 n'accepte pas les rectangles carrés comme des rectangles, sa connaissance est alors représentée par (R, non C)s_1. D'autres excluent les rectangles de taille trop grande ou trop petite, (composante contextuelle « Taille » : T), ne reconnaissent pas un rectangle s'il ne se présente pas dans la *position* standard, la longueur « horizontale » (P : « position »), ou si le rapport Largeur/longueur est trop petit (A : allongement) etc.

Au cours de son développement, le sujet abandonne les restrictions que ces composantes contextuelles opposent à sa connaissance de l'objet. Le processus de cet abandon consiste en une suite d'étapes où on distingue principalement la *centration* sur une composante conceptuelle. Par exemple le sujet peut commencer à distinguer des rectangles plus ou moins allongés, puis la *décantation* de la CC qui la détache du prédicat amalgamé ; l'allongement devient un nouveau prédicat amalgamé indépendant, susceptible d'être traité par les opérateurs logiques dont dispose le sujet à ce stade de son développement. (R, nonC, A) devient alors (R, nonC) et (A). Mais toutes les opérations logiques ne sont pas, elles non plus, directement disponibles pour l'enfant [12]. La formalisation de Wermus permet de décrire avec précision les étapes principales du développement concomitant des prédicats amalgamés et des préfoncteurs logiques.

Mais ce développement ne s'effectue pas en même temps ni de la même façon sur tous les champs de prédicats amalgamés : dans différents domaines tels que le nombre, l'espace, le temps etc. le développement de la pensée logique s'effectue grâce à des expériences spécifiques et selon des processus différents. C'est ici que les travaux de Piaget-Wermus pouvaient rencontrer la problématique de la didactique. Pour satisfaire les besoins de la recherche scientifique, le modèle de Wermus avait dû être *a priori* susceptible de représenter n'importe quelle évolution des connaissances du sujet, afin que les expériences et les observations permettent « ensuite » d'en éliminer certaines par des conditions supplémentaires. Sur le plan méthodologique, cette remarque m'a été précieuse et je l'ai utilisée systématiquement. En étendant hardiment aux connaissances mathématiques ses découvertes relatives aux foncteurs logiques, je pouvais en tirer sinon des conclusions du moins des hypothèses.

Par exemple, sa conclusion : « les foncteurs logiques n'apparaissent pas indépendamment des connaissances des sujets, mais au contraire se développent de façon concomitante et spécifique au cours d'expériences dans un domaine donné », m'a conduit directement à prévoir que la connaissance d'un théorème ne peut pas être attendue de procédés didactiques indépendants de son domaine mathématique, ni préalablement à son emploi par l'élève.. Et plus fortement, chaque savoir possède une genèse optimale parmi des genèses spécifiques. Finalement, les conditions qui président à l'acquisition d'une connaissance lui sont spécifiques. Un des objets de la didactique est d'établir cette spécificité, d'où l'analyse des situations spécifiques ressort comme le projet central de toute didactique.

En tout cas, ces travaux montraient qu'il était vain de vouloir forcer les acquisitions par des apprentissages montés comme des mécanos par recollement de « morceaux » suivant le plan de l'organisation logique des savoirs visés. La genèse des concepts chez l'enfant ne suit ni la voie de la genèse historique ni celle du savoir organisé. Mais jusqu'à quel point la genèse didactique doit-elle lui ressembler ? Et quels avantages peut-on attendre d'une didactique qui lui ressemblerait ? La croyance en la validité générale de cette conclusion m'a encouragé dans l'idée que l'apprentissage et l'usage des connaissances mathématiques devaient être étudiés en rapport avec des conditions et des milieux spécifiques.

Un exemple facilitera la présentation des concepts qui ont surgi du renversement de points de vue que constitue l'analyse des situations.

L'exemple des nombres naturels [13]

Une des premières épreuves qu'un débutant rencontrait, à l'époque, est celle par laquelle Piaget s'assure de l'acquisition de l'invariance « du nombre » par rapport aux variations de disposition des éléments « Où y en a-t-il plus, ici ? ou là ? ». Piaget demande de comparer une collection de 6 et une de 8 qu'il écarte et resserre (observation STU [14] (Piaget J. & Szeminska A. 1950)). La conclusion : « il a suffi de montrer à STU grâce aux petits nombres de 6 et de 4 qu'une rangée serrée peut contenir plus d'éléments… pour enfin découvrir la correspondance terme à terme ».

Cette conclusion me parut audacieuse et fit affluer les questions bien connues : avions-nous là une découverte, donc un moyen d'enseignement du nombre ? Ou bien s'agissait-il simplement de l'élucidation d'un malentendu par quelqu'un qui sait déjà beaucoup de choses mais qui ne saisit pas tout de suite de quoi il s'agit ? En effet comme très souvent dans les enseignements et dans les exercices scolaires, l'élève doit d'abord savoir ce qu'est un nombre pour entrer dans les exercices d'apprentissage du nombre ou des nombres. Quelle ressource aurait un observateur devant un élève mathématicien qui s'obstinerait à rester collé à la lettre des questions sans daigner comprendre ce qu'on lui suggère ?…

Comment définir un concept mathématique comme celui de nombre naturel par une situation qui puisse être comprise par des élèves qui ne savent pas ce qu'est un nombre et qui ne savent pas compter ? Existe-t-il une situation qui puisse représenter toutes les situations où la notion de nombre naturel apparaît ?

Et quelle différence y aurait-il entre une telle situation et une batterie de tests ?

Deux modèles classiques de « savoir compter »

Commençons par décrire deux situations culturellement classiques utilisées pour savoir si un enfant sait compter.

Une pratique populaire : Bébé compte, scène familiale

Maman : - Vous savez, grand père, le petit sait compter !

Grand père : - c'est vrai ? voyons ça mon mignon…

Maman : - « Montre à grand père que tu sais bien compter »

L'enfant, quatre ans : - Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, dix, quinze, heu…

Grand père, admiratif : - Aaah ! très bien ! Il ne te reste plus qu'à continuer !

Une pratique professionnelle : « compter » ainsi ne compte pas

Mais la famille comprend la tante Mimi qui est une institutrice à la retraite.

Tante Mimi : - Mais non, grand père, ce n'est pas cela savoir compter : pour savoir si cet enfant sait compter il faut lui montrer des doigts et lui demander combien il y en a, et puis lui demander à son tour de montrer tant de doigts ! Il ne suffit pas de réciter la suite des nombres ! Et s'il n'y parvient pas bien, il ne faut pas que maman soit déçue. À quatre ans la plupart des enfants ne peuvent guère vraiment comprendre les nombres au-delà de 5, les psychologues vous le diront.

Maman : - mais notre petite voisine Odile, qui a cinq ans, compte bien jusqu'à soixante et dix !

Tante Mimi : - Oui, elle peut aussi réciter « Le chat la belette et le petit lapin » qui comporte bien plus de 70 mots, mais elle croit que les pénates sont des espèces de pantoufles ! Ce n'est pas bien grave, mais une jeune collègue m'a raconté que les parents exercent actuellement une forte pression pour « faire compter » précocement les enfants.

Elle constate que sous l'influence de ce matraquage, certains de ses élèves se mettent à compter, dès lors qu'ils entendent le mot « nombre » sans même vouloir réfléchir à la question qu'on leur pose. Elle a dans sa classe des élèves « petits et moyens » d'école maternelle, des enfants qui comptent mécaniquement jusqu'au-delà de cinquante, et de ce fait, elle ne peut plus, ni avec eux, ni avec ceux qui ne dépassent pas cinq, organiser en commun aucune activité mathématique de leur âge, etc.

Analyses et modélisation

Le modèle du deuxième exemple contient et corrige évidemment le premier. Dans les deux cas la formulation des nombres est bien un moyen approprié de répondre à la demande, mais la tante Mimi modifie le modèle initial {Maître, élève, savoir} de façon essentielle en lui substituant le modèle {Maître, élève, savoir, milieu} où un milieu objectif est le nombre de doigts à montrer ou à compter. Ainsi, dans son rapport au milieu, l'enfant doit assujettir sa réponse à une nouvelle forme de validité qui n'est pas seulement celle de l'acquiescement ou du désir d'un adulte.

Cet assujettissement donne évidemment un tout autre sens au savoir, qui devient le moyen adéquat de répondre aux nécessités d'une situation objective, dénuée en elle-même d'intentionnalité didactique. Mais remarquons que l'enfant n'a pas les moyens de comprendre la question « combien » ni de répondre s'il n'en a pas appris le sens au préalable. De plus, il n'a pas les moyens de vérifier lui-même la validité de sa réponse. Le jugement de son adéquation reste sous le contrôle de l'enseignant. Cette situation est donc essentiellement une situation d'évaluation des connaissances.

Elle ne peut être utilisée pour l'enseignement que dans le cadre d'une didactique behavioriste qui consiste à répéter les questions, à enseigner comment on établit la réponse et, ici, à faire reproduire les techniques de comptage dans des associations question-réponse, jusqu'à reproduction parfaite.

Dans une situation « d'apprentissage » où l'élève devrait « s'adapter à une situation objective » (et non pas à une relation « duelle » avec l'enseignant), en produisant lui-même la connaissance, il est nécessaire que *la consigne ou le projet d'action puisse être conçu par le sujet sans le secours de sa solution* puisque c'est ce qu'il s'agit de construire ou d'acquérir.

Pour comprendre la situation, l'élève doit pouvoir envisager, avec ses connaissances actuelles, une stratégie de base correspondant à la consigne qui lui est donnée. La connaissance nouvelle est alors le moyen de produire l'effet attendu par une stratégie plus efficace, plus sûre, plus économique etc. Les connaissances sont en compétition et les motifs d'apprentissage sont des lois « économiques » qui se manifestent à l'élève lui-même.

L'apprentissage « behavioriste » fait appel à un sens, mais ce sens est extérieur au processus d'adaptation. De ce fait, c'est l'enseignant qui doit décider de ce qu'il va considérer comme un apprentissage élémentaire. Si une connaissance est trop complexe, il devra la décomposer, enseigner les parties, puis enseigner la composition de ces connaissances fragmentaires. Les raisons de ce découpage échappent à l'enfant et le sens de ce qu'il a appris ne pourra lui en être donné qu'après coup, par l'usage. Ce qui explique la nécessité de la multiplication des exercices d'applications du savoir appris. Le sens de ce savoir sera représenté, non pas par son adéquation à l'établissement des réponses, mais par un univers de situations déterminé par leurs analogies. Ainsi, l'enseignement classique de la division sépare l'apprentissage de l'algorithme, et celui de son sens.

La situation fondamentale du dénombrement

Pour satisfaire les conditions ci-dessus, et en utilisant quelques conclusions de la théorie, on obtient la situation suivante qui peut être traduite en instructions adaptées aux enfants de 3 à 7 ans :

« Nous avons des peintures dans ces petits pots. Tu dois aller chercher là-bas les pinceaux et en mettre un seul dans chaque pot. Tu dois apporter tous les pinceaux en un seul coup et il faut qu'il ne reste ni pinceau sans pot, ni pot sans pinceau. Si tu te trompes, tu reprends tous les pinceaux, tu les rapportes là-bas et tu essaies à nouveau. ***Tu sauras compter quand tu pourras le faire, même quand il y a beaucoup de pots et de pinceaux*** *».*

Claire Meljac (C. Meljac, 1979) a étudié plus tard une situation similaire. Cette situation englobe la précédente en ce sens que, dès que le nombre de petits pots devient assez grand, l'élève doit, soit disposer d'un moyen matériel de représenter la collection (dessin, énumération, avec ses doigts ou autrement etc.) soit la compter, au besoin en organisant son énumération. Le nombre n'est plus l'*objet* explicite de la question mais le *moyen* implicite d'y répondre.

Pour que le nombre apparaisse explicitement, il faut transformer cette auto-communication en une communication véritable :

« Tu dois rester près des pots, et dire ou écrire un message pour que ton camarade, puisse t'apporter les pinceaux que tu veux. S'il te porte trop de pinceaux ou pas assez, vous avez **perdu tous les deux.** *Vous saurez compter quand vous pourrez le faire, même quand il y a beaucoup de pots et de pinceaux ».*

L'enfant saura dénombrer lorsqu'il pourra jouer les deux rôles : *demander* (émetteur) à quelqu'un (récepteur), oralement ou par écrit, la quantité de pinceaux nécessaires en vérifiant l'opération, et inversement *fournir* à la demande la quantité voulue. [15]

Les moyens de résoudre ce problème vont évoluer, en particulier avec la taille des collections et la forme sous lesquelles elles se présentent. La connaissance des petits nombres s'enrichira lorsqu'ils serviront à en construire d'autres à l'aide de diverses opérations… Il faut observer que les enfants acquièrent rapidement certains schèmes vrais pour n'importe quel nombre, mais aussi que la possibilité effective de prendre ces schèmes comme objet de connaissance et de les manier comme des savoirs ne s'acquiert ni spontanément ni rapidement. Il faudra de plus, tôt ou tard, ne pas se contenter de leur usage, mais aussi élucider, formuler, discuter les propriétés et les structures numériques. Ces élucidations sont nécessaires à l'apprentissage lui-même et doivent l'accompagner. Comment et quand ? La connaissance DU nombre n'est pas réductible à celle des axiomes de PEANO. Les connaissances humaines ne sont pas contenues dans les savoirs qui les résument.

La différence entre le comptage comme **savoir** culturel habituel et le comptage comme **connaissance** d'un moyen de résoudre la situation fondamentale est bien visible dans l'exemple suivant dû à B. Quevedo de Villegas (1986).

Le sens des dénombrements

La situation précédente est proposée à des enfants en cours d'apprentissage (classique), qui « savent » déjà compter, en ce sens qu'ils savent résoudre le problème de l'émetteur et celui du récepteur (disons jusqu'à trente), mais qui n'ont pas encore la maîtrise du dénombrement. On peut alors observer parfois le comportement suivant :

L'élève va chercher une poignée de pinceaux et les distribue dans les pots.

- « Ah, il en reste trois ! »
- Tu as réussi ?
- Non parce qu'il m'en reste trois !
- Bon, reprends-les tous et essaie une autre fois.
Les autres élèves de la classe lui suggèrent :
- « compte !, compte ! »

L'élève compte les pots, repart, saisit une poignée de pinceaux et revient. Le fait de compter ne lui a servi à rien. Les autres élèves continuent à l'aider :

- Non ! non ! Tu dois compter les pinceaux.

L'enfant part, compte tous les pinceaux en prend quelques-uns et revient…

Il sait compter plus loin que le nombre de pinceaux qu'il a pris, mais il ne sait pas se servir de ce savoir pour faire autre chose que répondre à l'ordre : « compte », ou « combien y en a-t-il ? ».

Une condition supplémentaire : la confiance en ses méthodes :

Pouvons-nous affirmer que l'élève sait compter lorsqu'il est capable de constituer des collections adéquates de n'importe quelle importance dans les conditions de la situation fondamentale ?

Pas tout à fait : il doit aussi être capable d'être suffisamment sûr de son comptage pour identifier les sources d'erreurs et au besoin les discuter.

Par exemple, si au moment où il va chercher les pinceaux, quelqu'un lui dérobe un pot, il doit être capable de comprendre et dire :

- « tu m'as fait une farce ! ».

Cette confiance dans ses méthodes exige à son tour une position réflexive par rapport à elles, une « métaconnaissance », des mots pour exprimer les connaissances acquises, un métalangage, et finalement tout ce qui constitue la conversion en savoirs de certaines des connaissances. Ainsi notre situation de dénombrement n'était pas tout à fait fondamentale. L'est-elle maintenant ?

Par rapport aux méthodes classiques, cette situation fondamentale du dénombrement peut se révéler utile, à divers moments de l'apprentissage et surtout pour indiquer aux professeurs ce que veut dire « compter » en termes « concrets ». Ceci ne veut pas dire que l'apprentissage par l'usage exclusif de la situation fondamentale serait plus rapide ou plus efficace, elle peut se révéler inutilement lourde quand l'élève a compris le but de l'apprentissage.

L'organisation de processus génétiques longs

Comment s'organise l'acquisition d'une structure mathématique complexe comme celle des nombres naturels ? Elle nécessite évidemment des processus longs. Comment s'articulent les connaissances acquises en premier lieu, avec celles acquises ultérieurement ?

Apprendre séparément les pratiques partielles du comptage implique que l'adulte les enseigne, les exige, les corrige, les fasse imiter et répéter puis les compose. À aucun moment, l'enfant n'est en mesure d'établir lui-même la finalité de l'action et de corriger ses erreurs. Cependant, parents et enseignants utilisent avec un certain succès toutes ces formes dégénérées de la situation fondamentale, même le cas extrême de l'apprentissage formel de la suite des nombres. Aussi s'agit-il moins de rejeter certaines d'entre elles que de les utiliser au mieux suivant leurs caractéristiques particulières.

Les désavantages principaux des apprentissages « partiels » sont les suivants :

- ils ne permettent pas de déférer à l'enfant la responsabilité du jugement sur la valeur de ses réponses, ni de lui décrire à l'avance un projet d'apprentissage dont il peut évaluer les progrès

- il faut qu'il ait déjà appris la réponse d'une manière ou d'une autre pour comprendre ce qu'on lui demande de faire.

La théorie des situations permet d'étudier les solutions existantes et d'en proposer des différentes. En particulier, en replaçant les techniques partielles dans une genèse globale intelligible. La présentation d'une telle genèse sortirait du cadre de cet article, mais l'utilisation de la situation fondamentale et de la poursuite de la connaissance de nombres de plus en plus grands y jouent un rôle essentiel.

Apprendre les nombres

Les exemples ci-dessus présentent le principe d'une situation fondamentale mais ils laissent dans l'ombre la diversité des situations nécessaires à l'ensemble du processus, la complexité des rapports au savoir, et un grand nombre de phénomènes. Car finalement, il faudra bien, pour cela, que l'élève ***énumère***[16] les collections (qu'il appelle l'un après l'autre, tous les objets sans appeler deux fois le même), en même temps qu'il les ***dénombre*** (qu'il évalue leur cardinal par correspondance avec une autre collection), en particulier quand il les ***compte*** (qu'il mette en correspondance leurs éléments avec les mots) puis, si le comptage a été décomposé, en « ***nombrant***[17] » (en exprimant oralement le nombre à l'aide d'un système de numération) le résultat de son comptage, et ensuite en ***écrivant ce nombre.*** Il faudra aussi qu'il s'approprie les usages ***ordinaux*** de la suite des nombres, etc. La dénomination et l'écriture des premiers nombres utilisent des procédés de ***numération*** qui doivent être reconnus pour être utilisés, mais dont l'étude et l'analyse doivent se poursuivre tout au long de la scolarité obligatoire, ne serait-ce que pour connaître et utiliser de nouveaux nombres. L'analyse du cryptage numérique et des systèmes de numération, opposés à la pratique du ***numéral,*** notamment à la lecture des ***numéros***, est indispensable.

La taille des nombres et leur construction

Quel est l'effet de la taille des nombres ? Utilise-t-on vraiment et peut-on apprendre de la même façon des nombres de 2 à 7, des nombres entre 15 et 30, des nombres au-delà trois cents, des nombres comme ($25^{25\cdots}$…) ? Quels répertoires sont nécessaires à ces apprentissages ? Avec le répertoire cumulatif suggéré par Peano et l'algorithme « ajouter un », pour connaître un nombre n, il faut avoir « appris » tous les nombres précédents ? Cet ordre d'apprentissage est il inéluctable ? La réponse est non : d'autres opérations sont susceptibles de permettre un meilleur usage de ces nombres aux propriétés ergonomique différentes. L'addition, la multiplication ou la puissance sont des moyens bien plus puissants pour construire directement, connaître et manipuler certains intervalles de nombres.

La convention avait décidé en 1794 de régulariser la dénomination orale des nombres. Des études du même type nous ont conduit à montrer les déficiences de la disposition classique en France des calculs numériques légués par l'histoire et à proposer de nouvelles dispositions éprouvées très avantageuses… qui n'ont jamais été prises en considération.

Conclusion

Ces études montrent des problèmes et des résultats que l'importation mal contrôlée des travaux de l'école de Piaget dans la didactique avait tendance à faire passer au second plan.

Les théories des situations

Introduction

La *théorie des situations didactiques en mathématiques* peut s'appuyer aujourd'hui sur l'esquisse d'une *théorie générale des situations,* prolongement de la théorie des jeux.

La perspective classique conduirait à déterminer ensuite la catégorie des situations didactiques, puis à spécifier dans ce cadre les situations de didactique des mathématiques, comme cas particulier de la précédente.

Cette approche a convenu lorsqu'au XVIIe siècle, s'est créé un enseignement de masse. Elle est due à Comenius et suppose qu'il existe un algorithme d'enseignement universel, qu'il s'agisse d'Art, de science ou de langue (Coménius, 1992).

Pourtant il est assez clair que chaque connaissance nouvelle, chaque théorème, chaque branche des mathématiques suppose une situation spécifique. La logique mathématique montre qu'il n'existe pas de méthode universelle de construction des énoncés vrais et l'histoire illustre ce fait. La pratique classique n'existe donc que grâce à des compromis didactiques réels mais cachés par des approximations et des fictions épistémologiques et psychologiques. Les logiques de l'administration et de la politique les portent à se cramponner à la hiérarchie classique car il est plus facile de financer un seul laboratoire de métaphysique dont on prétendra ensuite appliquer les résultats à la thermodynamique comme à l'électronique et à l'optique, que de financer dix laboratoires spécialisés.

Je suis parti dans une voie différente. Celle qui consiste à rechercher le « compromis didactique » à partir des activités de production et d'usage de la connaissance. Il ne suffit pas de pouvoir citer ou réciter les mathématiques pour les connaître, il faut les apprendre – donc les enseigner – avec leur fonction propre et les agréger par leur fonctionnement.

J'ai donc d'abord tenté de déterminer la nature de l'activité mathématique par les situations où ces connaissances s'exercent pour étudier ensuite les conditions dans lesquelles ces situations peuvent être suscitées ou reproduites à des fins didactiques.

Cette méthode m'a permis d'analyser, d'imaginer et de comprendre le fonctionnement de diverses genèses, concevables pour tous les concepts mathématiques fondamentaux – ceux que l'on veut enseigner dans la scolarité obligatoire –, y compris celles qui sont effectivement pratiquées. La recherche des compromis et des agrégations présente des difficultés théoriques et pratiques redoutables. Il a toujours été clair que les situations et les genèses que nous avons conçues pour les étudier n'étaient pas destinées à être projetées vers les professeurs comme méthodes d'enseignement. Il n'empêche qu'elles ont dû être diffusées. Ces travaux relèvent de ce que j'appelle aujourd'hui la *théorie des situations mathématiques* a-didactiques. Nous ne pourrons guère qu'indiquer son organisation.

Car c'est au moment où il s'est agi d'inclure une situation mathématique dans une situation où l'un des agents est animé d'une intention didactique que les paradoxes dissimulés par le compromis classique sont apparus. La *théorie des situations didactiques en mathématiques* a été érigée pour résoudre ces paradoxes.

La théorie des situations didactiques est une approche et une méthode de recherche parmi beaucoup d'autres, mais elle donne une excellente base pour l'étude de ce que j'appelle la *micro-didactique*, par référence à la micro-économie. Elle vise à prévoir les conditions dans lesquelles les échanges entre une institution et un milieu ou entre deux institutions vont dépendre d'*une connaissance* déterminée.

Elle offre, de plus, un cadre conceptuel à la *macrodidactique* qui se propose de dégager comment sont déterminées les grandes orientations de l'enseignement des mathématiques dans les sociétés et leurs rapports relativement à l'idée qu'elles se font de telle ou telle connaissance mathématique. L'expérience a montré qu'il ne suffit pas de résoudre tous les problèmes scientifiques et techniques dont dépendent l'utilisation, la diffusion et le développement d'une connaissance et d'une pratique d'enseignement pour qu'elle soit effectivement adoptée, quelle que soit son utilité et quelque faible que soit son coût. Pour l'enseignement français, les exemples abondent : des réformes modestes (numération orale décimale, dispositions du calcul humain) jusqu'aux plus complexes (l'enseignement des statistiques).

Quelques généralités sur les situations

Les situations dont il s'agit sont des « modèles » en termes de jeux. Elles représentent une partie des interactions d'un joueur appelé « actant » avec une partie de son environnement appelé « milieu ». L'actant peut être une personne ou une institution, le milieu peut comprendre ou non des actants, doués ou non d'intentions, engagés dans des coopérations ou dans des compétitions avec l'actant.

Johan Huizinga [18] (J. Huizinga 1938, 1951) a soutenu que le jeu est un facteur fondamental de tout ce qui se produit au monde, au point qu'il a proposé de substituer au nom d'homo sapiens et d'homo faber celui d'homo ludens.

La théorie des jeux a connu vers la même époque un développement mathématique extraordinaire (Von Neumann, Morgenstein et Nash, 1944, 1947). Dès les années soixante-dix, je me suis intéressé aux problèmes concrets posés par l'interprétation et la modélisation mathématiques des activités humaines d'apprentissage à l'aide de ces modèles. Sous le nom d'étude des actions situées, la voie a été reprise au milieu des années quatre-vingt, indépendamment semble-t-il, par certains sociolinguistes (Michel de Fornel et Louis Quéré 1999). Il faut ajouter que quels que soient les jeux et leurs enjeux, nous supposons que les actants obéissent à une règle implicite supplémentaire : le résultat doit être obtenu au moindre coût, au moindre effort, au moindre risque. De sorte que notre actant est un *homo oeconomicus* en même temps qu'un *homo ludens*. Cette condition n'était évidemment pas étrangère à la théorie des jeux, mais l'accent mis sur les difficiles questions d'équilibres laisse parfois dans l'ombre les aspects ergonomiques plus modestes.

L'étude générale des situations se divise en une « *statique des situations* » et en une « *dynamique des situations* » qui déterminent ensemble quelques *types fondamentaux de situations* et la *méthodologie*.

La statique des situations décrit les dispositifs matériels, le rôle des protagonistes, les actions permises c'est-à-dire les règles convenues dans lesquelles s'inscrivent leurs décisions, les états initiaux et les états terminaux ainsi que les enjeux attachés à certaines de ces issues.

Dans ces conditions, les diverses décisions, tactiques ou stratégies de l'actant, peuvent être interprétées comme l'effet de connaissances qui proposent ou soutiennent ces décisions. Par ce moyen, les connaissances se voient dotées, dans cette situation, de propriétés ergonomiques en termes de coût de la mise en œuvre, intérêt, fiabilité, probabilité d'apparition… Qu'il s'agisse de prévoir ou d'expliquer le résultat d'une expérience, ce genre d'analyse est une aide précieuse.

L'intérêt de différentes connaissances pouvant procurer la solution dépend de la valeur de certains paramètres. Par exemple pour résoudre un système de deux équations du premier degré, la substitution est une assez bonne méthode universelle (encore qu'elle puisse être dépassée dans des circonstances favorables par d'autres plus simples). Elle est impraticable pour un système de cinq équations…

La dynamique des situations étudie les évolutions dans le temps des systèmes milieu-actant. Dans le cas où une situation doit être fréquentée par l'actant, il est possible de prévoir que celui-ci adapte ses connaissances à cette situation. Suivant les caractéristiques de cette fréquentation, et la complexité de l'apprentissage (des modifications nécessaires du répertoire, assimilations et accommodations) il est possible d'envisager les connaissances les mieux adaptées, suivant de façon grossière, le coût de chaque usage, la fréquence d'emploi, et le coût de l'apprentissage.

Nous supposons alors que, quel que soit le processus de création, si le sujet produit cette connaissance elle sera justifiée et renforcée par la fréquentation [19] de la situation.

Nous avons ainsi montré que les modes de connaissance optimaux étaient différents suivant les conditions de la situation de l'apprentissage et de la fréquentation. Nous avons établi ces domaines de meilleure efficacité, pour les nombres naturels, pour les nombres décimaux et rationnels, pour les rapports avec l'espace, etc.

L'adaptation à une situation peut ainsi conduire à la « création » de connaissances, mais aussi à des modifications du milieu, à des questions nouvelles…

L'étude de la dynamique des situations a montré que dans certains cas une connaissance localement adaptée peut faciliter « l'acquisition » de connaissances plus sophistiquées et plus générales, mais que dans d'autres cas elle peut la rendre plus difficile. Elle peut même s'ériger en véritables obstacles comparables aux *obstacles épistémologiques* introduits par Bachelard (Bachelard, 1938). Nous avons montré que contrairement à son opinion ce phénomène d'obstacles se produisait en mathématiques.

L'étude de la genèse d'une connaissance devient alors un véritable problème d'optimisation entre des contraintes opposées.

Les types de situations élémentaires

Dès le début des années soixante-dix, nous avons différencié des types de situations, suivant les principaux types d'échanges avec le milieu : actions, messages, preuves, ordres. Il existe une très remarquable mais très naturelle correspondance entre les différents types de structuration du milieu, les types d'échanges, les types de connaissances et les types d'apprentissages (comprenant notamment ceux montrés par Bateson, 1972, 1981).

Les situations réelles sont décomposables en situations élémentaires. Celles-ci peuvent se composer dans la mesure où il existe une hiérarchie des décisions compatibles (sinon elles engendrent des injonctions paradoxales).

La méthodologie

La théorie des situations ne serait qu'un discours de plus s'il ne lui était associé un ensemble de modalités et de méthodes de confrontation avec l'observation des activités et de leurs résultats. Cette confrontation prend deux aspects aussi importants l'un que l'autre à mes yeux :

– d'abord, le calcul des situations et l'étude de leurs variables. Ce sont les bases de l'étude *a priori*, indispensable aussi bien à l'observation de la contingence qu'à la production de dispositifs aux caractéristiques connues, décrites et assumées, l'ingénierie didactique ;

– ensuite l'observation, mais surtout, l'observation soutenue et participative – en un sens très précis et très contrôlé, développé dans l'expérience de l'école J. Michelet – qui seule, à mon avis, permet la mise à l'épreuve des concepts et des modèles théoriques.

Des méthodes d'études stochastiques comme l'analyse implicative, développée précisément pour leur usage en didactique permettent des confrontations plus directes dans le cas d'observations sur de nombreuses cohortes de situations. Les réponses d'un élève à trente questions ne forment pas une statistique pour un psychologue centré sur le sujet, contrairement à l'observation de trente élèves répondant à une même question. Pourtant c'est une population de trente observations pour qui veut dire en quoi ces trente situations se ressemblent ou diffèrent.

Quelques principes

L'utilisation de modèles de situations n'est pas seulement une sorte de technique d'étude ou d'ingénierie. La consistance exige de lui associer des principes et entraîne quelques conséquences dont voici les plus importantes.

a) La détermination des modèles

1. Les conditions qui concourent aux manifestations d'une connaissance donnée ne sont pas indépendantes et simplement juxtaposées, elles forment un système : le milieu

2. L'interaction de l'actant avec ce milieu a la structure d'un jeu – la situation.

3. Tous les objets du champ sont définis par leur fonction dans une situation. En particulier toute connaissance n'entre dans le champ qu'en étant définie par au moins une situation dont elle fournit une solution.

4. Un modèle d'actant et une situation forment un « automate » au sens mathématique, sur lequel peuvent être définies les diverses caractéristiques des composants : pertinence, adéquation, réalisabilité, coûts, etc.

5. Postulat de l'existence d'au moins une situation spécifique de chaque « connaissance ».

6. Postulat de l'existence d'au moins une situation fondamentale dans chaque classe des situations spécifiques d'une même connaissance. Cette situation est susceptible d'en générer d'autres par différents processus : la représentation, l'application (détermination de certaines valeurs de variables libres)… L'adjonction de son énoncé à son résultat produit des énoncés nouveaux et de nouvelles questions…,

7. Postulats de la Correspondance connaissances/situations,

8. Postulats de l'existence de situations fondamentales

etc.

b) Conclusions tirées de l'usage de ces modèles

1. L'observateur doit être lui-même modélisé et inclus dans le système.

2. La structure du milieu et celle de la connaissance solution ne sont *a priori* ni identiques ni même souvent comparables.

3. Une connaissance identifiée dans la culture par un observateur, prend inévitablement des propriétés et un sens différents, dès lors qu'elle est engagée dans des situations particulières. Ces différences de sens sont augmentées par la variété des ressources pédagogiques générales. Elles ne peuvent être combattues que par une connaissance précise et un respect de protocoles didactiques spécifiques éprouvés.

Ces prolégomènes semblent pouvoir être utilisés dans de nombreux domaines, et notamment dans la didactique des diverses disciplines. La question qui se pose maintenant est celle de la spécification de ces situations pour la modélisation de l'enseignement.

c) L'usage de modèles dans la recherche scientifique exige que l'on distingue très nettement les termes définis dans le modèle et les termes correspondants en usage dans le milieu que l'on modélise. Exemples triviaux : un « savoir » défini dans la culture, et son modèle la « connaissance de l'actant » telle qu'elle est déterminée par une situation précise ; la connaissance prêtée à l'enfant en fonction de sa prestation est un modèle de la connaissance – inconnue – de cet enfant… Cet usage n'est tenable que si l'univers de la recherche n'est pas en contact direct avec le milieu modélisé. Si elle l'est, comme c'est le cas en médecine, la contamination du langage des malades par celui des médecins peut créer de grandes difficultés, mais celle de la terminologie médicale par le vocabulaire et les concepts populaires rendrait impossible toute recherche scientifique. Or c'est ce qui se produit encore trop souvent en didactique. Les chercheurs distinguent mal leurs objets théoriques de leur référent effectif.

Questions sur les situations mathématiques

Q : Existe-t-il un modèle de l'activité mathématique valide pour toutes les connaissances mathématiques ?
R : oui comme schéma, non comme modèle effectif ; chaque énoncé réclame une démonstration qui lui est propre).

Q : Les mathématiques et l'activité mathématique, sont-elles dans le rapport d'objet à outil ?
R : Il pourrait sembler que oui, car l'activité mathématique est un outil pour penser et créer les mathématiques, et réciproquement les mathématiques sont les outils de l'activité mathématique. Mais les outils sont des moyens aménagés pour un but précis or l'activité mathématique mobilise des moyens non encore aménagés et identifiés.

Q : Un modèle d'activité valide pour celles des mathématiciens le serait-il pour tous les usages et pour tous les utilisateurs ?
R : Au pied de la lettre probablement pas, mais l'idée d'un partage *a priori* entre ceux qui penseraient les mathématiques et ceux qui se contenteraient de citer leur discours est une absurdité épistémologique, irrecevable du point de vue éthique éducatif pour l'école commune. Le modèle classique « textes et problèmes » organise seulement la visite guidée des produits de l'activité mathématique.

Q : Que manque-t-il à ce modèle classique ?
R : Une initiation des élèves au questionnement des connaissances et à leur organisation, la création des problèmes, la dialectique entre les questions et les solutions, le doute et la construction du savoir etc. La chronogenèse scolaire est subordonnée à la topogenèse savante. À l'inverse l'épistémologie professionnelle des professeurs est une construction assujettie à l'apprentissage des textes.

Q : Le réalisme platonicien n'est-il pas très répandu chez les mathématiciens comme chez les professeurs ?
R : Oui, mais cette conception conduit à dénier qu'il existe une transposition didactique spontanée et légitime. Et qu'elle nécessite de reconstruire des situations fondamentales et des processus génétiques.

Q : Les situations mathématiques d'action, de formulation, de preuve, peuvent-elles résoudre tous les problèmes d'apprentissage et d'enseignement ?
R : Non, car devant être entièrement proposées par le professeur, elles ne permettent de restaurer que des courtes bribes de genèses. Suffirait-il de reproduire des situations génériques des connaissances et de laisser faire ? Nous l'avons tenté, avec le curriculum sur les statistiques et la mesure des événements. Nous n'avons pas pu le faire intégralement avec les rationnels et les décimaux parce que l'articulation des savoirs y est trop complexe et les exigences de savoir beaucoup plus sévères.

Q : Mais est-il possible de « reproduire » un processus historique ?
R : Les connaissances mathématiques sont créées dans des conditions très ouvertes, par des spécialistes très avertis, et le temps et le hasard jouent un grand rôle. Par la suite, elles sont reprises, utilisées, réinterprétées. Donc en général, le sujet ne peut pas distinguer dans tout ce qu'il a mobilisé pour résoudre un problème, ce qui est exactement important, ce qui sera utile. Oui, c'est la raison pour laquelle des phases d'institutionnalisation sont indispensables dans l'enseignement comme dans l'histoire.

Q : Le travail du mathématicien n'est-il pas celui d'un homme seul, exceptionnel, absorbé dans des spéculations inouïes ? N'est-il pas légitime alors de concevoir l'apprentissage des mathématiques par les élèves comme un processus individuel ? Or les situations didactiques que vous étudiez sont souvent collectives et évoquent des organisations sociales.
R : Non le travail des mathématiciens n'est qu'en partie un travail solitaire, les mathématiques sont une culture, les relations dans un milieu partageant une même culture y sont essentielles, par lettres au XVII[e] siècle ou par internet aujourd'hui. De plus les situations où des élèves doivent coopérer offrent des motivations beaucoup plus étendues que les projets personnels.

Proposer des situations qui permettent aux élèves de pratiquer tous les aspects spécifiques de l'activité mathématique et par ce moyen d'apprendre ses résultats est l'objectif de tout enseignement raisonnable. Les conceptions classiques semblent souffrir d'une représentation épistémologique biaisée auprès de la population et des professeurs. Mais la thèse du constructivisme radical n'a pas résisté à une analyse précise. Elle s'est révélée inconsistante, contradictoire. L'élève ne peut pas reproduire, en situation adidactique seule, ni les processus historiques, ni les savoirs culturels. Il ne peut produire que des « connaissances ». Le rôle de la société mathématique ne se réduit pas à enregistrer les énoncés produits : elle les vérifie, elle les adopte comme référence, elle leur assigne *de facto* un rôle et avec le temps, une place. Les élèves n'ont pas besoin de réinventer ou même de vérifier personnellement chacune des connaissances qu'ils utilisent. Les mathématiciens ne le font pas toujours… Dans les situations mathématiques qu'il confie aux élèves, le professeur doit représenter le fonctionnement de la communauté des mathématiciens : faire circuler les questions, institutionnaliser les réponses qu'il reconnait correctes et apporter opportunément des savoirs qui leur sont nécessaires. Savoir comment faire ce travail est difficile et ne s'improvise que rarement avec succès. C'est pourquoi l'initiation des professeurs à ce rôle et aux savoirs qui l'établissent est indispensable.

La situation mathématique des élèves doit donc être insérée dans une situation didactique. Je donnerai ci-après deux des difficultés rencontrées.

Les situations didactiques en mathématiques

Les situations didactiques relèvent soit du modèle de la *dévolution* soit de celui de l'*institutionnalisation*.

La dévolution

1. Si le professeur indique toujours à l'élève ce qu'il doit faire dans des termes qui ne lui laissent aucun choix, ce dernier, au mieux, exécute un ordre. L'élève n'exerce ses connaissances (et ne les montre) que dans la mesure où la situation lui laisse une incertitude que ces connaissances réduisent, donc s'il y a un risque d'erreurs.

D'ailleurs l'enseignement vise à adapter l'élève à des situations de la vie courante où toutes les conditions didactiques auront été abolies. Il faudra alors que cet élève conçoive ses réponses en fonction du problème objectif qui lui est posé – nous l'appelons la situation *a-didactique* – et non en réponse aux dispositions didactiques facilitatrices mais sans rapports avec le contenu. Pour entraîner l'élève à ces situations le professeur doit lui en proposer.

2. La dévolution est le passage d'une situation didactique à une situation a-didactique. Cette transition est plus complexe que le passage classique du cours au problème, ne le laisse paraître. L'élève doit accepter ce qu'aucun adulte n'accepterait, c'est-à-dire de s'engager à obtenir un résultat, (avec le risque d'être mal jugé) sans savoir à l'avance comment il peut le faire.

3. S'engage alors une sorte de négociation autour de ce que nous avons appelé un contrat didactique, qui ne peut être en fait ni explicité, ni tenu s'il l'était. Il fixe l'illusion qui permet le déroulement de l'activité didactique et l'apprentissage. Le déroulement de la situation n'est possible que grâce à un renouvellement permanent de l'espoir et de la confiance des protagonistes.

4. Il en résulte que pour enseigner, le professeur doit, de son côté, accepter pour l'élève des risques d'erreurs qui comportent à terme, pour lui aussi, un risque d'échec. L'apprentissage est un processus historique et stochastique. La réussite individuelle n'est pas garantie.

L'institutionnalisation

Nous avons indiqué plus haut que si l'actant, disons l'élève, peut s'adapter de façon autonome à une situation déterminée, il ne peut pas anticiper le rôle de la connaissance locale qu'il a produite dans des situations plus générales qu'il ne rencontrera que plus tard.

Le plus souvent d'ailleurs, il ne peut même pas « reconnaître » la connaissance qu'il a mise en œuvre car un métalangage lui est nécessaire pour l'évoquer dans ses rapports avec les autres élèves ou avec le professeur

L'institutionnalisation consiste à placer la connaissance produite par l'élève par rapport aux connaissances culturelles et aux intentions didactiques du professeur. Elle revient à passer d'une organisation chronogénétique didactique des connaissances à une organisation topogénétique scolaire « officielle ».

L'institution comporte donc la relecture par le professeur de l'activité de l'élève et sa réinterprétation.

La théorie générale des situations telle que nous l'avons présentée plus haut envisageait de modéliser l'activité dans des milieux sans intention didactique par des automates finis. Notre étude montre que cette conception n'est qu'une approche grossière. Les modèles Stimulus-Réponse sont insuffisants, de même que les automates finis. Seul le modèle le plus général, celui de Turing (M. Gross A. Lentin, 1970), peut convenir car il faut concevoir l'enseignement comme comportant une réécriture, une réinterprétation du passé (Brousseau, 2002).

Conclusion

Nous savions tous que la diffusion et l'enseignement des connaissances est un phénomène très complexe. Avons-nous progressé dans la compréhension de cette complexité ?

Lorsque j'ai exposé les prétentions de ma thèse devant Pierre Gréco, en 1970, il hocha la tête et après avoir tiré sur sa cigarette, il me dit :

– « La psychologie cognitive et l'épistémologie génétique sont déjà bien difficiles ! Alors l'enseignement ! Je ne crois pas qu'on soit en mesure de réussir un tel projet pour le moment. Mais finissez de rédiger ce que vous m'avez montré sur le nombre et ce sera déjà assez pour une thèse de psychologie. »

Comme je n'avais pas besoin d'une thèse de psychologie, j'ai persévéré. Aujourd'hui on peut avoir le sentiment qu'un défi difficile a été relevé. Pouvons-nous dire pour autant que Pierre Gréco se soit trompé ?

Je n'en suis pas si sûr. Mon exposé n'a pas fait allusion aux moteurs principaux de nos travaux – l'observation et l'ingénierie didactique – ni aux principales étapes, ni à ce que nous pourrions considérer comme des progrès significatifs ou même des voies prometteuses. Mais il n'évoque pas non plus les craintes, les doutes et les difficultés qui tendent sans cesse à nous décourager. J'évoque ci-après un exemple des difficultés des rapports entre nos recherches et l'enseignement.

De l'usage des situations-problèmes

Origines

Nous observons depuis le début du 20e siècle (J. Dewey) une longue et vigoureuse poussée en faveur d'un enseignement fondé sur l'activité des élèves. Pour C. Freinet comme pour Vigotski cette activité doit prolonger celle du milieu environnant. En mathématique, l'activité est bien représentée par la résolution de problèmes, mode d'enseignement accompagnant la présentation et l'étude de textes et de théories mathématiques en classe.

Durant un moment, ce mouvement a pris de l'ampleur à partir des années soixante, entre autres sous l'influence des travaux du mathématicien Polya. Dans la perspective pédagogique classique ce mouvement a conduit à enseigner les « problem solving methods », c'est-à-dire les méthodes de résolution. Si les heuristiques ont la forme de règles ou d'énoncés mathématiques, les conditions de leur validité et surtout de leur emploi n'en font pas des théorèmes : « il faut essayer ». Cet enseignement conduisait les élèves à rechercher les solutions des problèmes dans l'inventaire des méthodes qu'on leur avait enseigné comme des « savoirs pratiques » plutôt que dans l'inventaire de ses savoirs et dans l'examen de la situation mathématique elle-même. On observait un phénomène de glissement méta-didactique : la centration se déplaçait du problème lui-même sur des commentaires sur les problèmes… Heureusement le mouvement s'est tari avant que l'on recherche des heuristiques du second ordre pour prolonger le raisonnement par un second glissement ! Dans la relation didactique, pour les élèves, les heuristiques sont des connaissances mais ils ne doivent pas les traiter comme des références c'est-à-dire comme des savoirs. Elles ne doivent pas entrer dans le contrat didactique. De nombreux professeurs ignorent cette clause et conçoivent ne devoir accepter de leurs élèves que ce qu'ils leur ont enseigné, et en conséquence devoir enseigner comme des références tout ce qui est nécessaire pour résoudre les problèmes. Les effets négatifs de cette conception ne cessent de se montrer sans qu'aucune analyse ne parvienne à les traiter.

Le malaise est constant et mal éclairci. Beaucoup de professeurs ont alors préconisé de considérer avec leurs élèves que les problèmes qu'ils leur proposaient étaient « ouverts », c'est-à-dire que leur solution n'était pas connue, que la situation n'était pas parfaitement définie par l'énoncé,… C'était une façon d'essayer d'échapper au dilemme du professeur : s'il n'a pas enseigné comme des savoirs tout ce qui apparaît comme nécessaire à la solution du problème, il est accusé « d'avoir été incompétent » ou de vouloir « humilier ses élèves en les mettant en échec ». Ces thèses tendaient à rejeter toute contrainte sur les élèves au nom d'une conception idyllique mais tout à fait superficielle de l'enseignement : cette conception du contrat didactique tend à développer une fiction du fonctionnement des connaissances et des savoirs et à refuser au professeur le droit de présenter quelque défi que ce soit. Au nom d'un prétendu droit des étudiants à être traités en adultes - c'est-à-dire en non-étudiants - on enferme la relation didactique dans un contrat contradictoire, intenable et improductif.

Des professeurs ont réagi en choisissant de postuler que certains problèmes sortent de ce contrat classique, qu'il ne s'agit pas d'une épreuve de contrôle, les élèves peuvent ne pas aboutir sans être fautifs, c'est la recherche que l'on vise à provoquer… Le terme « situation-problème » a indiqué ce nouveau contrat.

Le terme a fait florès peu de temps après l'exposition des premiers principes de la théorie des situations. Il répondait à un besoin concret, et il a pu paraître se référer à la théorie des situations, mais en fait il lui était étranger. Toutes les actions didactiques ou adidactiques (problèmes ou non) y sont envisagées comme possédant un modèle en termes de situation. Le terme « situation » ne peut pas différencier des formes de problèmes. Il a donc servi essentiellement à éviter toute exigence théorique à la fois envers les notions de « situations ouvertes » et de « problème », tout en faisant profiter le thème des apports qui pouvaient plaire en délaissant ceux qui pouvaient déplaire.

Circonstances : séductions, emprunts et méprises

Avant de nous interroger sur la réalité et sur les conséquences de ce phénomène, il convient d'évoquer son rapport avec le sujet qui nous intéresse.

La réforme des mathématiques envisagée par les mathématiciens portait sur les instruments même de construction des mathématiques. Il s'agissait de s'assurer avec les élèves d'un générateur logique de la pensée mathématique à l'école, comme on le fait avec la grammaire pour la langue. Dans ce rôle la « théorie des ensembles » ne pouvait pas être introduite de façon axiomatique par le biais de définitions comme en logique mathématique. Elle ne pouvait être introduite que de façon « naïve », c'est-à-dire en confondant le langage construit (objet) avec le langage du constructeur (outil de construction). Toute autre présentation engageait « un glissement métadidactique » récurrent [20].

Les situations mathématiques d'action ont été conçues dans les années soixante-dix essentiellement pour résoudre ce type de difficultés : introduire des concepts validés par leur fonction, sans utiliser de mots nouveaux. Elles avaient une même caractéristique : elles réclamaient l'usage de connaissances « sous forme d'actions », donc indépendamment de la formulation qu'elles pouvaient recevoir. La formulation, la validation explicite et l'articulation sur des connaissances antérieures faisaient l'objet de situations différentes, concomitantes ou non.

Par la suite la méthode a été étendue à tous les sujets de mathématiques élémentaires. Il s'agissait de contrôler le sens des concepts mathématiques en même temps par leur organisation syntaxique et par leur usage.

Les dispositifs d'épistémologie génétique devaient présenter la même propriété : ils servaient à révéler le développement des « structures de la pensée » indépendantes des cultures et des langues. Ces structures devaient être connues de l'observateur, mais avoir été cachées aux élèves et les professeurs devaient ne pas les avoir enseignées. Ces dispositifs révèlent donc ces structures sans qu'il soit nécessaire que le sujet en ait conscience et surtout sache les nommer d'une façon ou d'une autre. C'est en ce sens que la voie de Piaget se distingue, s'oppose à, et complète celle de Vigotski. Au moment où Piaget en avait besoin, la logique et les structures mathématiques se sont présentées avec les bonnes propriétés culturelles (pour cause de rupture entre la culture des mathématiciens et celle des enseignants). La production de dispositifs pour les observations d'épistémologie génétique conduisit les piagétiens à construire des situations d'actions.

Les épistémologues d'abord, puis les didacticiens ont ainsi fourni aux enseignants exactement ce qu'ils souhaitaient : des moyens de comprendre et de présenter à leurs élèves le sens des notions de mathématiques modernes qu'ils ne pouvaient guère définir dans les termes où elles se présentaient. Les situations comportent un milieu, matériel ou non, dont le mécanisme et l'inertie s'oppose aux intentions, au finalisme des humains qui les affrontent. Les connaissances prennent leur sens dans ce rapport, non seulement au savoir mais aussi au monde.

Mais la conception des situations était le fruit de réflexions approfondies et d'une expérience spécifique, leurs propriétés n'étaient obtenues que sous des conditions très nombreuses et complexes. Pour le professeur, leur mise en œuvre n'avait rien d'une agréable promenade guidée. Quelques exemples de situations ont été assez largement diffusés auprès des professeurs, mais pas leurs conditions d'élaboration et d'application. Et chacun s'est senti désireux, non pas d'utiliser ces exemples, mais d'en créer de semblables… dans des conditions qui rendaient cette tâche très aléatoire. Comment des professionnels de l'enseignement, habitués à concevoir et à conduire convenablement leurs enseignements auraient-ils pu imaginer le temps, les instruments et les conditions nécessaires pour mettre au point ou même seulement conduire ces situations où les seuls qui devaient disposer d'une certaine liberté étaient les élèves. L'identification avec l'élève ne résulte pas d'une intention ou d'une posture mais d'une connaissance précise et d'une sensibilité attentive aux variables essentielles de l'élève et de la situation.

Il semble par exemple que la nouveauté des situations d'action ait plus souvent retenu l'attention des enseignants que leurs propriétés didactiques et mathématiques effectives et surtout que leurs conditions d'application. Les situations et les processus de formulation de validation ou d'institutionnalisation dans lesquels elles étaient imbriquées étaient souvent plus négligés. Par exemple, alors que la théorie des situations met l'accent sur la nécessité d'articuler sur une situation d'action, une situation de formulation effective (où les formulations inadéquates reçoivent des « sanctions » du milieu), les dispositifs didactiques proposés étaient formels et sans règles comme le « travail en groupes », le « travail libre ». Ils étaient en réalité confidentiellement (individuellement) appuyés par le professeur qui faisait ainsi des « situations-problèmes » d'étranges avatars de la maïeutique socratique. Il s'agissait souvent d'un problème classique, « ouvert » par divers stratagèmes formels tels que le plongement dans un environnement insolite, la suppression des informations ou de la question, par la disposition de « distracteurs » etc. Les professeurs attendaient de ces situations-problèmes des effets bénéfiques par l'opération d'effets inconnus.

Effets différents des « situations-problèmes » et des « situations adidactiques »

Les situations-problèmes (ouvertes) réellement présentées prennent du temps, et elles ne sont presque jamais décisives, autant les réserver pour des questions plutôt fondamentales et déboucher sur des acquisitions spécifiques. Leurs résultats s'apprécient après le processus, en termes divers : les savoirs de référence qui ont été compris et acquis sont essentiels ; des péripéties et des connaissances visitées, il ne devrait rester que ce qui soutient ces savoirs. Il est donc nécessaire qu'un temps suffisant soit consacré au passage de la trouvaille à sa présentation standard. Abandonner une situation-problème sous la forme d'un delta indistinct de conclusions divergentes se perdant dans un marécage d'observations vagues n'enrichit nullement la plupart des élèves.

Par contre, le temps dévoré par ces « situations » qui fournissent un lot bien trop faible de connaissances utilisables et utilisées, chez un assez petit nombre d'élèves, tend à manquer lourdement au moment de l'institutionnalisation et des apprentissages plus formels.

Les situations ouvertes (pour les élèves) sont faites pour leur donner – à tous – le sentiment d'avoir vécu un moment important, où s'est accomplie une tâche difficile, mais qui les concerne tous, où chacun des élèves a joué un rôle, apporté son concours à l'œuvre collective et dont il a retiré personnellement des avantages… Ce n'est ni banal, ni facile.

Certains ont réussi des épisodes de ce genre et ont vu leur caractère exceptionnel et la difficulté de les reproduire, ou d'en tirer les bénéfices espérés.

Le terme « situations-problèmes » a aussi contribué à donner un succès considérable à l'utilisation de « techniques » composites combinant des suggestions pédagogiques qui surgissaient en grand nombre.

Pour beaucoup il s'est agi de proposer des problèmes classiques, un peu plus difficiles peut-être, mais traitables uniformément par de petits groupes d'élèves, et qu'un compte rendu commun final suffisait à éclairer. Ils en ont conclu qu'il était possible de s'exonérer d'une information et d'un contrôle théorique précis, jugés compliqués, prétentieux et donc inutiles.

Alors que certains voulaient ou croyaient recevoir des méthodes applicables comme des appareils ménagers, d'autres n'acceptaient que ce qu'ils pouvaient bricoler et qui porterait ainsi leur marque personnelle. Beaucoup ne s'occupaient guère des questions théoriques ; pour certains, les éléments de théorie validés expérimentalement étaient reçus comme des garanties de succès magiques alors que d'autres pensaient qu'il s'agissait de considérations superflues.

Quelques hypothèses…, que j'aurais voulu confronter à des observations précises.

1. L'utilisation des « situations ouvertes » s'est beaucoup répandue chez les enseignants, en particulier au collège. Ces situations se présentent souvent comme un moyen privilégié pour introduire des notions nouvelles, mais elles ont aussi été utilisées très souvent pour l'étude de questions ordinaires.

Le terme « situation-problème » recouvre des pratiques extrêmement diverses. Les techniques et les théories didactiques qui auraient permis et limité l'usage de ces situations, ne sont apparues que tardivement et n'ont pas reçu les mêmes appuis idéologiques.

2. Dans l'utilisation des « problèmes ouverts » on a pu relever les faits suivants, dont il faudrait observer la fréquence avec laquelle ils se présentent dans les classes.

– l'incertitude des élèves est par définition grande, donc en l'absence de rétroactions naturelles et rapides, les « corrections » des idées des élèves sont tardives et sporadiques, seules quelques-unes reçoivent une confirmation ou un désaveu, et après un temps considérable ;

– la probabilité de réussite complète par un élève est très basse. Elle résulte ordinairement d'une construction ou d'une réflexion collective. L'appropriation de la solution collective par chacun des élèves dépend autant des modalités de l'institutionnalisation partielle au cours du processus que de l'institutionnalisation finale. Si cette institutionnalisation s'effectue mal ou trop tard, les élèves croient à tort avoir appris. Qu'en est-il réellement ?

3. Les élèves s'habituent à ces situations à basse probabilité de réussite et tendent à étendre leurs comportements dans ce cas à toutes les situations didactiques : réflexion très lente, temps de résolution uniformément exagéré même pour des questions faciles, acceptation de conclusions floues, de formulations approximatives ou franchement erronées hors des périodes de recherche. Jusqu'à quel point ?

Tout le système s'est accommodé de ces situations d'entrée « ouvertes » à très basses probabilités de réussite, auxquelles on a accepté de prêter des vertus éducatives de façon incontrôlée.

4. Les professeurs glissent sans s'en rendre compte d'un type de situation à un autre aux propriétés bien différentes. Par exemple le professeur peut être obligé de transformer sa situation ouverte par l'introduction ou la mise en valeur habile d'informations qu'il apporte, ou de questions plus fermées qui transforment sournoisement la situation en une simple maïeutique socratique. C'est un procédé qui a son intérêt dans certaines circonstances, mais qui trompe son monde. L'élève croit avoir bien compris la démarche parce qu'il l'a parcourue facilement mais il est incapable de la rétablir et de reproduire si besoin était, le savoir qu'on a voulu lui enseigner. Les connaissances et les savoirs sont confondus, de même que les commentaires ou le métalangage avec le texte…

Il faut noter que le fonctionnement purement symbolique de certaines situations adidactiques n'est pas à exclure. Elles fonctionnent alors comme une « représentation », dans son sens théâtral de mise en spectacle. De producteur de pensée mathématique l'élève devient acteur, ou même spectateur. Ce procédé peut avoir un domaine d'utilité si le professeur sait l'exploiter habilement dans des circonstances favorables.

Les dispositifs adidactiques sont des mises en scène du savoir en tant que connaissances. Ce procédé est parfaitement légitime si, et seulement si, il est enchâssé dans des situations didactiques bien maîtrisées. Le meilleur effet des situations ouvertes est de permettre, dans leur sillage, l'utilisation de situations classiques plus rapides et plus fermées sans avoir à les convertir en redécouvertes véritables. Nous avons démontré que le constructivisme radical était théoriquement impossible et concrètement illusoire.

5. Les concepts de la méthodologie classique sont intéressants, mais le principe de leur utilisation les condamne à rester rudimentaires : ils orientent professeurs et élèves vers des solutions universelles faciles à transmettre et à mettre en œuvre à partir de l'organisation des textes du savoir, mais localement très souvent médiocrement adaptées. En particulier ils ont du mal à mettre en évidence la structure épistémologique des connaissances enseignées ou apprises, et les différentes valeurs relatives des connaissances soulevées. Autrement dit, la portée épistémologique de leurs connaissances est aplatie : tout semble être également « à apprendre », et en conséquence rien ne semble mériter de l'être.

Certains élèves sont spontanément exigeants envers leur savoir : ils ont l'expérience d'avoir ressenti cette impression d'impunité que l'on doit ressentir quand on a compris et appris convenablement une connaissance de référence. Ils savent qu'il faut faire des efforts, se poser des questions jusqu'à un certain moment où ils peuvent dire : « j'ai compris » et où ils se sentent invulnérables face à tout nouveau problème sur ce sujet, « prêts à en découdre » en tout cas ! Ils savent que tous les efforts qui ne les auront pas amenés à ce stade auront été vains. La seule façon de rentabiliser son travail c'est d'atteindre ce point de confiance indispensable et confortable, que l'on apprenne à marcher ou à conduire. Le problème de la didactique c'est donc de rendre possible cette accession à l'ensemble des élèves. La jubilation d'une classe entière qui peut jouer à ce jeu-là, est précieuse et d'une force symbolique essentielle.

6. La multiplication des propositions didactiques de toutes formes, souvent ingénieuses mais associées à la reconduction d'une didactique classique inappropriée a profondément modifié les normes du contrat social de l'enseignement. Les élèves, les parents et parfois les professeurs eux-mêmes considèrent (ou traitent en fait) toutes les activités des élèves avec un point de vue uniforme, confondant les phases de recherche, d'apprentissage et de contrôle… L'utilisation quotidienne et parfois exclusive de ces situations « ouvertes » mal exploitées et la confusion entre les types de résultats qui y sont obtenus ont alimenté les rumeurs et peut-être ont contribué à une rupture de contrat entre les enseignants et la société dont ils sont les mandataires.

7. Cette rupture a été accentuée par un changement de mode de gestion de l'enseignement par cette société. Abandonnant le contrôle classique de l'enseignement par la compréhension rationnelle de ses décisions, la société prétend désormais gérer l'enseignement sans avoir besoin de le connaître ou de le comprendre, par le simple jeu de « contrôles » et par l'inscription d'un devoir de résultat au registre des obligations professionnelles des enseignants. Cette attitude absurde ouvre la porte à des exigences contradictoires qui ont bouleversé l'enseignement et en fait permis toutes sortes de dérives.

8. La diffusion des travaux issus de la théorie des situations a donc à la fois mis en évidence les défauts des différents choix didactiques, proposé des solutions, et néanmoins contribué à aggraver les effets que ces travaux voulaient combattre.

9. Cet effet pourrait être dû aux méprises découlant de l'emploi par les chercheurs et par les enseignants des mêmes termes et des mêmes concepts. Dans leurs rapports avec les enseignants, les chercheurs utilisent leurs termes et leurs concepts professionnels, usent de métaphores et d'exemples dans un langage familier. Ils devraient considérer ces concepts souples et pratiques, mais inconsistants, comme un objet d'étude mais pas comme un moyen d'étude et

surtout pas comme un bon modèle. L'approche scientifique des questions d'enseignement ne peut pas faire l'économie d'un langage spécifique qui devrait être tenu soigneusement distinct du langage et des conceptions ordinaires. Les rapports sociaux nécessaires aux travaux et à la formation ne le permettent pas pour l'instant.

De plus ce jargon pénètre dans les rapports entre les professeurs et leurs élèves par un processus identifié sous le nom de « perméabilité didactique ». Les professeurs utilisent avec leurs élèves, les termes spécifiques de la connaissance scientifique ou professionnelle du concept, mais parfois aussi leur jargon d'anciens élèves ou les usages que la tradition leur impose (le sens donné au signe « = » dans l'enseignement primaire et secondaire est aberrant). Je crois que contre toute attente, le jargon des mathématiciens pénètre presqu'autant que le jargon des didacticiens).

10. On peut douter de la possibilité de mettre en application les conclusions indiscutables d'une recherche expérimentale et théorique, même si elle est parfaitement décrite, compréhensible et facile à réaliser de sorte qu'elle ne demande aucun aménagement ni aucun matériel, ni formation supplémentaire des enseignants. Autrement dit, l'ingénierie microdidactique est insuffisante pour résoudre certains problèmes qui semblent relever de la macrodidactique (L'étude de la représentation des connaissances dans les grandes institutions de la société et de leur diffusion entre elles).

L'exemple frappant est celui des irrégularités de la numération décimale orale, et surtout les trois absurdités « soixante-dix », « quatre-vingts » et « quatre-vingt-dix » auxquels certains francophones sont fanatiquement attachés. Cette absurdité occupe les enseignants et les enfants de six ans pendant trois mois. Elle est une cause de difficultés pour seulement quelques-uns mais aussi d'un retard pour tous. Ses effets négatifs sont observables dans les comparaisons avec les cultures voisines plus raisonnées. Ce sont finalement des millions d'heures d'enfants gaspillées pour satisfaire cette exigence sénile (en fait un demi milliard d'heures de travail d'enfants depuis deux cent ans que le problème est soulevé). La solution d'un tel problème est une œuvre didactique qui n'est apparemment pas à la portée de l'école, ni d'un gouvernement.

Conclusion

À la fin d'une carrière toute orientée vers l'aide à l'enseignement au moyen d'une connaissance scientifique de ses difficultés, on se prend à douter. Il reste tant de travail à accomplir et il a été fait si peu ! La multiplicité des questions à traiter, la variété des approches possibles, la complexité des phénomènes, les difficultés à conduire des recherches véritablement scientifiques et expérimentales, les résistances sociales, épistémologiques et économiques de toutes sortes, semblent autant de raisons de désespérer.

Mon antidote a été le suivant. J'ai eu la chance de pouvoir observer des maîtres qui aimaient faire la classe, enseigner, s'occuper des élèves, et d'aimer les regarder faire ce qu'ils aimaient, de pouvoir saisir ces moments exaltants où des élèves s'étonnent d'une question, s'enflamment pour une idée, s'éprennent pour un savoir qu'ils veulent apprendre, comprendre, posséder, où ils s'excitent à partager leur plaisir. J'aimais imaginer, pour les maîtres, des provocations didactiques à utiliser ce genre de situations qu'ils mettaient en œuvre adroitement si elles leur plaisaient. Et j'étais toujours curieux de savoir ce qu'ils allaient en dire ou en faire. Leur désir d'enseigner et le plaisir qu'ils y prenaient étaient l'inducteur du plaisir et du désir de leurs élèves, et du mien. Le reste est technique, professionnalisme, travail et chance.

NOTES

1. Pierre Gréco (1927-1988), directeur de Recherches à l'École Pratique des Hautes études à Paris, collaborateur proche de Piaget au Centre international d'épistémologie génétique. Auteur de *Structure et développement: Approches du développement cognitif*. Il a dirigé mes études et mes travaux sur l'apprentissage du calcul dans les années 1967-1972. La précision de ses dispositifs expérimentaux et de ses analyses ont fortement influencé la théorie des situations.

2. Né à Varsovie en 1919, Henri Wermus est docteur en mathématiques, professeur honoraire de l'Université de Genève. Son étroite collaboration avec Jean Piaget l'a amené à s'intéresser aux aptitudes cognitives de l'homme. Il a notamment publié des ouvrages sur la logique des fonctions mentales. Nous nous sommes connus à la CIEAEM au début des années 60, il m'a initié à sa théorie des prédicats amalgamés qui lui ont permis d'analyser les étapes du développement de la pensée logique des enfants.

3. Le sens était dans la structure pour les structuralistes, ou dans la sémantique au sens de Carnap, c'est-à-dire dans les réalisations de la structure, ou dans la fonctionnalité de la structure…

4. Parmi les demandes les plus populaires, la plus violente et la plus destructrice a été et est encore celle de l'individualisation de l'enseignement.

5. Diénès a décrit là sa théorie des 6 étapes de l'apprentissage des mathématiques: (1) free play, (2) games, (3) search for communalities, (4) representation, (5) symbolization, and (6) formalization (p. 36).

6. Théorie des Situations Mathématiques.

7. André Lichnerowicz, (1915 - 1998), éminent mathématicien français, un des promoteurs du mouvement des mathématiques modernes à qui Lucienne Félix me présenta en 1963. Il me conseilla, dirigea mes études et me donna le sujet d'étude qui me conduisit à concevoir le COREM. Membre de l'Académie des Sciences, il a présidé de 1966 à 1973, la Commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques, connue sous le nom de « Commission Lichnerowicz ».

8. Jacques Wittwer, (1919-), professeur de Sciences de l'éducation à l'université Bordeaux 2.

9. Nous verrons plus loin l'exemple du comptage et de l'énumération. Le comptage implique implicitement l'énumération, mais apprendre à compter n'exige pas apprendre explicitement à énumérer.

10. « Déplacements » ou « transformations » sont peut-être des termes techniques du géomètre mais qui correspondent ici sans équivoque à des actions à des mouvements usuels… mais il ne s'agit plus de mouvements vécus dans l'action; il s'agit de mouvements imaginés exécutés ou reconstitués en pensée. » Pierre Gréco *structures et significations* (EHESS 1991)

11. Aebli *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestlé, 1951.

12. Certaines lignes de la table de vérité qu'ils utilisent sont absentes, par exemple.

13. p. 94 C'est plus – comment çà? – on voit à la ligne (on serre les huit on écarte les six) – là (où il y a six) il y a plus – pourquoi? - Là ça fait plus petit on les a serrés – Mais il y en a moins? – Oui. Cette expérience montre dit-il « comment il a suffi de montrer à Stu grâce aux petits nombre de 6 et 4 qu'une rangée serrée peut contenir plus d'éléments qu'une rangée de plus grande longueur pour qu'elle cherche à combiner les apports de longueur et de densité et en vienne ainsi à décomposer les ensembles présentés, puis enfin à découvrir la correspondance terme à terme ». STU peut avoir mis, légitimement derrière tous ces pronoms indéfinis : « C », « ça », « en »… le concept de « la place occupée par la collection », « ça » étant la collection elle-même. L'insistance de l'observateur va bientôt la conduire à rejeter cette idée et à lui substituer celle de nombre d'objets de la collection. Peut-on pour autant conclure comme Piaget « qu'il a suffi de montrer à STU grâce aux petits nombres de 6 et de 4 qu'une rangée serrée peut contenir plus d'éléments… pour enfin découvrir la correspondance terme à terme » ?

14. Extrait en partie de : Brousseau, G. (1995). Les mathématiques à l'école. in *Bulletin de l'Association des professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* n° 400 (12 p). Accessible sur http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/APM95.pdf

15 Cette situation semble présenter un caractère fondamental parce que « toutes » les situations de comptage peuvent en être déduites en faisant varier ses variables cognitives (nature, mobilité des objets, circonstances, taille des ensembles, etc.) et que toutes les pratiques de comptage et d'apprentissage du comptage peuvent ainsi être classées et comparées du point de vue didactique. Les deux pratiques habituelles précédentes s'obtiennent à partir de la situation fondamentale par suppression ou par transfert à l'adulte de certaines tâches. Dans la première, que nous pourrions appeler par exemple « le comptage populaire », l'enfant reproduit une suite de mots sous le contrôle de l'adulte. La seconde, « le comptage scolaire classique », est plus évolué, il reste à l'enfant à faire correspondre un nombre à un ensemble de pots (travail d'émetteur), ou à constituer un ensemble d'un nombre donné de pinceaux.

16. Par exemple, compter les éléments d'une collection peut exiger qu'on énumère la collection c'est-à-dire que l'on repère successivement tous ses éléments sans en oublier et sans en repérer aucun plus d'une fois ; faire une liste de commissions (par exemple) exige une énumération mais pas un comptage. Cette dernière situation est plus spécifique du comptage. Certaines difficultés de comptage peuvent être seulement des difficultés d'énumération (en combinatoire par exemple). Les élèves apprennent aujourd'hui comme hier à compter et en même temps à énumérer, et le professeur lui ne peut pas distinguer les deux objectifs et les traiter séparément. Savoir s'il faut ou non proposer des exercices d'énumération indépendants de l'apprentissage du nombre est une question typique d'ingénierie didactique. Pour plus d'informations, consulter (J. Briand, 1993), (M. Bahra, 1995) (B. Villegas, 1986), (Habiba El Bouazzaoui, 1982)

17. Néologisme.

18. Johan Huizinga, Historien néerlandais 1872-1945.

19. Fréquentation : la rencontre répétée de « la même » situation, ou d'une situation différente mais concernant différentes formes de la même connaissance. Par exemple comme condition non critique dans une situation (rencontre), comme réponse ou moyen de réponse : implicite à une situation d'action, explicite dans une formulation, dans une preuve, dans une situation didactique d'institutionnalisation, de familiarisation, d'usage comme répertoire dans de nouvelles situations…

20. L'enseignant dont une tentative d'enseigner vient d'échouer a le choix entre diverses stratégies. L'une d'elles consiste à faire de la tentative elle-même un nouvel objet d'étude et d'enseignement, l'analyser, la commenter, la reformuler, la décrire avec de nouveaux termes,… Les mêmes pratiques didactiques conduisent à développer dans cette deuxième approche, un métalangage pour parler les éléments de la première. Exemple : la logique des prédicats jugée trop difficile pour certains usagers a été décrite à l'aide de l'algèbre des parties d'un ensemble, elles-mêmes représentés métaphoriquement par des graphes, pour lesquels il a fallu développer un métalangage totalement dénué de statut mathématique… Le procédé est récursif, il peut conduire à faire échouer les processus didactiques les plus puissants comme la réforme des mathématiques modernes.

RÉFÉRENCES

Bachelard, G., (1938). *La Formation de l'esprit scientifique Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*. Éditions Vrin.

Bahra, M., (1995), *Problèmes de didactique de la numération, échecs et succès de la re-mathématisation*, LADIST, Université Bordeaux 1.

Bateson, G., (1972) *Steps to an Ecology of Mind: Collected Essays in Anthropology, Psychiatry, Evolution, and Epistemology*, University Of Chicago Press.

Bateson, G., & Birdwhistell R., & Goffman E., & Hall E.T., & Jackson D., & Scheflen A., & Sigman S., & Watzlawick P., (1981), *La nouvelle communication*, Le Seuil.

Briand J. (1993) *L'énumération dans le mesurage des collections*, LADIST, Université Bordeaux 1.

Brousseau, G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire*. Paris: Dunod.

Brousseau G. (2002) « Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques », (2002), p. 83-155, *Questions éducatives, l'école et ses marges: Didactique des mathématiques*, n° 22-23, Centre de recherches de l'Université Jean-Monnet Saint-Etienne.

Brousseau, G., & Centeno, J., (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, RdM 11(2-3), p. 167–210.

Centeno, J., (1995) *La mémoire didactique de l'enseignant*, mémoire de thèse (posthume), Travaux rassemblés par Claire Margolinas, LADIST.

Comenius, (1627-1632), *La grande didactique ou l'art universel de tout enseigner à tous,* Éditions Klingksieck, 1992.

Diénès, Z. P., (1965), *Comprendre la mathématique,* OCDL.

Diénès, Z. P., (1965), *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire* éditions, OCDL.

El Bouazzaoui, H., (1982), *Étude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération, Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions,* 1982, université Bordeaux 1.

de Fornel, M., & Quéré L., (1999) *« La logique des situations » Nouveaux regards sur l'écologie des activités sociales* Éditions de l'école des hautes études en Sciences Sociales.

Freinet C., (1946), *L'école moderne française.*

Gross, M., & Lentin, A., (1970), *Notions sur les grammaires formelles*, Gauthier-Villars.

Huizinga, J., (1938), « homo ludens » essai sur la fonction sociale du jeu Tel Gallimard 1951.

Illich, I., (1971) *Une société sans école,* Le Seuil.

Marcuse, H., (1968) *Repressive Tolerance* (1965) *Negations.*

Meljac C., *Décrire, agir et compter*, PUF, 1979.

Piaget J. & Szeminska A., (1950) la genèse du nombre chez l'enfant, Éditions Delachaux et Niestlé.

Quevedo de Villegas, B., (1986), *Le rôle de l'énumération dans l'apprentissage du dénombrement*. Thèse Dr de Didactique des Mathématiques de l'université Bordeaux 1.

Vigotski L., *Psychologie pédagogique* (1926).

Von Neumann, Morgenstein, & Nash, (1944), (1947) *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press.

Wermus, H., (1981) modélisation de certaines activités de la pensée à l'aide des prédicats amalgamés, *la pensée naturelle : structures, procédures et logique du sujet* Groupe de recherche Ontogenèse des processus psychologiques, université de Rouen, PUF.